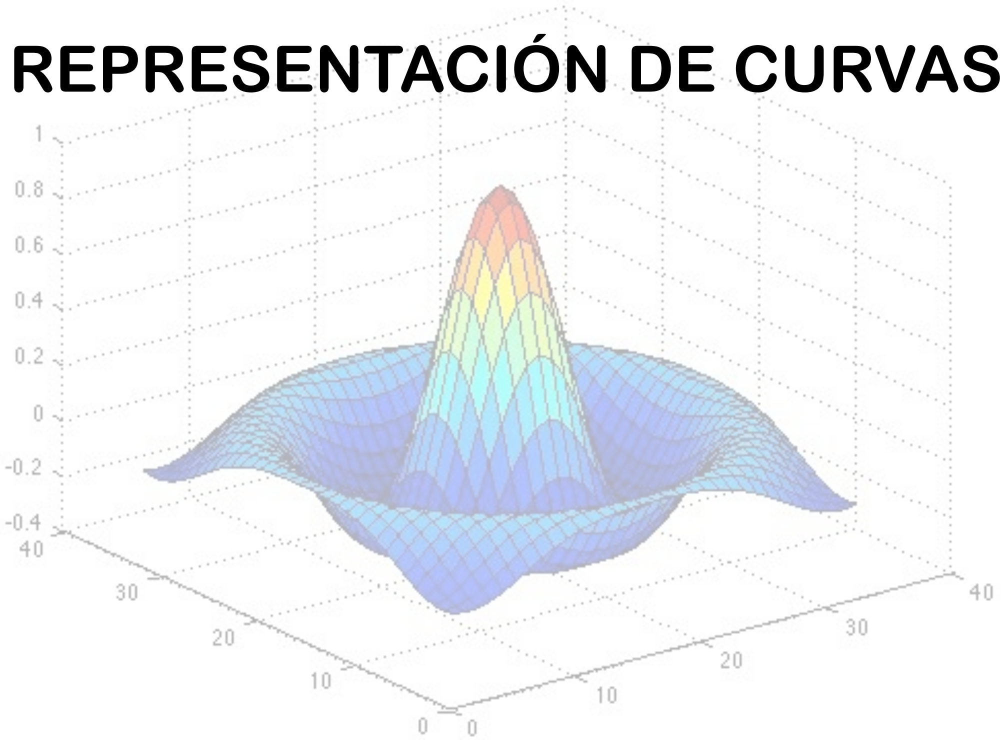
CÁLCULO

TEMA 2

REPRESENTACIÓN DE CURVAS



0. Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Límites
- Derivadas
- Dominio de una función
- Máximos y mínimos
- Funciones logarítmicas y exponenciales. Propiedades y operaciones elementales
- Polinomios
- Funciones polinómicas
- Trigonometría: medidas de ángulos, funciones seno, coseno y tangente y relaciones trigonométricas básicas

1. Justificación del estudio

Hoy en día el ingeniero de cualquier especialidad se encuentra en su trabajo diario multitud de gráficas y curvas que debe interpretar o ayudar a interpretar. Estas gráficas pueden presentarse de varias maneras, bien por la ecuación que las define o bien por una tabla de valores que permita su representación.

Pero el análisis de curvas es mucho más que la mera construcción gráfica de la misma: debemos aprender también a interpretarlas, y esto es posible mediante un proceso sistemático de construcción de las mismas que nos orientará en temas claves como son el dominio natural de la función, sus asíntotas, puntos significativos, etc.

En el caso de que la función a representar nos venga dada por una tabla de valores, se aprenderá a ajustar la nube de puntos a un polinomio o una curva siguiendo diferentes métodos y aplicando después métodos de interpolación para obtener los valores que necesitemos y no estén de forma explícita representados de forma tabular.

Para estudiar una curva podemos utilizar diferentes métodos de expresión analítica:

En coordenadas cartesianas:

- En forma implítica: $f(x,y)=0$
- En forma explícita: $y=f(x)$
- En forma paramétrica: $x=x(t); y=y(t)$
- En coordenadas polares: $\rho=f(\varphi)$

En lo que sigue, se hará un recorrido sobre los aspectos más importantes que deben estudiarse de una función para permitir su trazado y su posterior estudio.

2.- Estudio de la gráfica de una función

Para el estudio y trazado de la gráfica de una función, se seguirán los siguientes pasos:

2.1 Dominio de la función[1]

Es el conjunto de valores de x para los cuales la función tiene un valor bien determinado. También puede expresarse en sentido contrario: valores de x que hacen que la función no exista. Así, por ejemplo, el dominio natural de la función:

$$y = x^4 - 2$$

es el intervalo $(-\infty,+\infty)$,ya que la función está definida para todos los valores de x. La función:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

está definida para todos los valores de x excepto para $x = 1$, pues este valor anula el denominador. Esto puede expresarse también del siguiente modo:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 1\}$$

Para la función $y = \sqrt{1-x^2}$, su dominio natural de definición es el intervalo [-1, 1].

2.2 Simetrías

Una función es simétrica respecto al eje OY[2] cuando se verifica que $f(-x) = f(x)$

Una función es simétrica con respecto al origen[3] si se verifica que $f(-x) = -f(x)$

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3 - x$ es impar ya que:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

Otro ejemplo, la función $g(x) = 1 + \cos(x)$ es par ya que:

[1] También denominado Campo de Existencia o Dominio Natural de definición de una función

[2] Cuando es simétrica respecto al eje OY también se dice que la función es **par**

[3] Cuando una función es simétrica respecto al origen se dice que la función es **impar**

$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos(x) = g(x)$

(recordemos que $\cos(x) = \cos(-x)$)

No todas las funciones tienen que ser pares o impares, o lo que es lo mismo, presentar simetrías. Existen funciones, y de hecho son la mayoría, que no son simétricas, es decir, no son pares ni impares.

2.3 Máximos y mínimos

1) *Condición necesaria para la existencia de un extremo:* si la función derivable $y = f(x)$ tiene un máximo o un mínimo en el punto $x = x_1$, su derivada se anula en ese punto, es decir, $f'(x_1) = 0$.

2) *Condiciones suficientes para la existencia de extremos:* supongamos que la función $y = f(x)$ es continua en un cierto intervalo, al cual pertenece el punto crítico x_1, y es derivable en todos los puntos del mismo. Si al pasar por este punto de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de "más" a "menos", entonces la función admite un máximo en $x = x_1$.

Si al pasar por el punto x_1, de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de "menos" a "más", la función admite un mínimo en ese punto.

De modo que:

$$\text{Si a)} \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ para } x < x_1 \\ f'(x) < 0 \text{ para } x > x_1 \end{cases}$$

la función tiene un máximo en el punto x_1.

$$\text{Si b)} \begin{cases} f'(x) < 0 \text{ para } x < x_1 \\ f'(x) > 0 \text{ para } x > x_1 \end{cases}$$

la función tiene un mínimo en el punto x_1.

A continuación se muestra un ejemplo para ilustrar todo lo anterior.

Ejemplo 1: *Hallar los máximos y mínimos de la función:*

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

Primero: hallamos la primera derivada: $y' = x^2 - 4x + 3$

Segundo: calculamos las raíces reales de la derivada $(f'(x) = 0)$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

Por consiguiente,

$x_1 = 1,\ x_2 = 3$

Tercero: Analizamos los valores críticos.

El primer punto crítico es $x_1 = 1$. Como $y' = (x - 1)(x - 3)$, resulta que:

para $x < 1$ se tiene: $y' = (-). (-) > 0$;

para $x > 1$ se tiene: $y' = (+).(-) < 0$;

Esto quiere decir que al pasar (de izquierda a derecha) por el punto $x_1 = 1$, el signo de la derivada cambia de "más" a "menos". Por tanto en el punto $x_1 = 1$ la función tiene un máximo.

$$y = \frac{(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 3(1) + 1 = \frac{7}{3}$$

$(y)_{x=1} = 7/3$.

El segundo punto crítico es $x_2 = 3$:

para $x < 3$ se tiene: $y' = (+).(-) < 0$;

para $x > 3$ se tiene: $y' = (+).(+) > 0$;

Esto significa que al pasar por el punto $x = 3$ el signo de la derivada cambia de "menos" a "más". Por tanto en $x = 3$ la función tiene un mínimo, cuyo correspondiente valor de ordenadas es

$$y = \frac{(3)^3}{3} - 2(3)^2 + 3(3) + 1 = 1$$

$(y)_{x=3} = 1$.

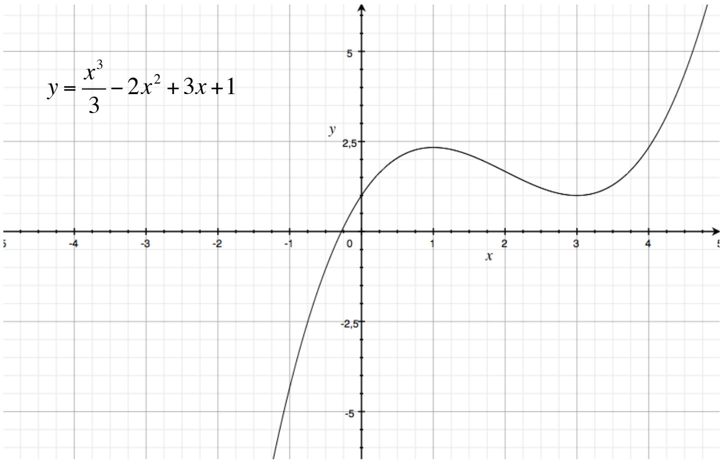


Figura 2-1. Máximos y mínimos de la función del ejemplo 1.

<u>Ejemplo 2</u>: *Hallar los máximos y mínimos de la función:* $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$

Primero: hallamos la primera derivada,

$$y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Segundo: calculamos los valores críticos de la variable independiente:

$$\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0,$$

$$x_1=2/5;$$

y encontramos los puntos donde la derivada es discontinua (aquí la derivada se hace infinita). Así sucede en el punto $x_2 = 0$.

Tercero: analizamos la naturaleza de los puntos críticos obtenidos

$(y')_{x<2/5}<0,\ \ (y')_{x>2/5}>0;$

deducimos que en $x = 2/5$ la función tiene un mínimo. El valor de la función en este punto es igual a:

$$y_{x=\frac{2}{5}}=(\frac{2}{5}-1)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

Estudiamos ahora el segundo punto crítico, $x = 0$.

Como $(y')_{x<0} > 0$, $(y')_{x>0} < 0$, deducimos que en $x = 0$ la función tiene un máximo que es $(y)_{x=0} = 0$.

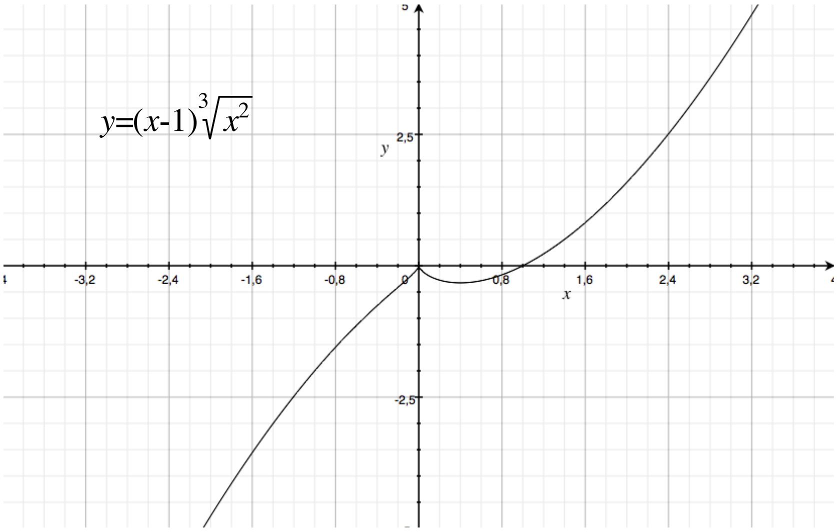


Figura 2-2. Gráfica de la función del ejemplo 2.

3) *Análisis del máximo y mínimo de una función mediante la segunda derivada*: Si $f'(x_1) = 0$, entonces en $x = x_1$ la función tiene un máximo si $f''(x_1) < 0$, y un mínimo si $f''(x_1) > 0$.

Ejemplo 3: Hallar los máximos y mínimos de la función: $y = 2senx + \cos 2x$

Puesto que la función es periódica y tiene un periodo 2π, es suficiente estudiarla en el intervalo $[0,2\pi]$

a) Hallamos la derivada

$$y' = 2\cos x - 2sen2x = 2(\cos x - 2senx\cos x) = 2\cos x(1-2senx)$$

b) Calculamos los valores críticos de la variable independiente:

$$2\cos x(1-2senx) = 0 \qquad x_1 = \frac{\pi}{6};\ x_2 = \frac{\pi}{2};\ x_3 = \frac{5\pi}{6};\ x_4 = \frac{3\pi}{2}$$

c) Hallamos la segunda derivada:

$$y'' = -2senx - 4\cos 2x$$

d)Analizamos la naturaleza de cada uno de los puntos críticos:

$$y''_{x_1=\frac{\pi}{6}} = -2.\frac{1}{2} - 4.\frac{1}{2} = -3 < 0$$

por tanto en el punto $x_1 = \frac{\pi}{6}$ tenemos un máximo cuya ordenada es $\frac{3}{2}$

Luego,

$$y''_{x_2=\frac{\pi}{2}} = -2.1 + 4.1 = 2 > 0$$

Por consiguiente en el punto $x_2 = \frac{\pi}{2}$ tenemos un mínimo con ordenada 1.

En el punto $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ tenemos:

$$y''_{x_3=\frac{5\pi}{6}} = 1 - 4.\frac{1}{2} = -1 < 0$$

por tanto en este punto tenemos un máximo con una ordenada de $\frac{3}{2}$

Y finalmente,

$$y''_{x_4=\frac{3\pi}{2}} = -2(-1) - 4.(-1) = 6 > 0$$

Consecuentemente, en el punto $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ tenemos el mínimo con una ordenada de -3.

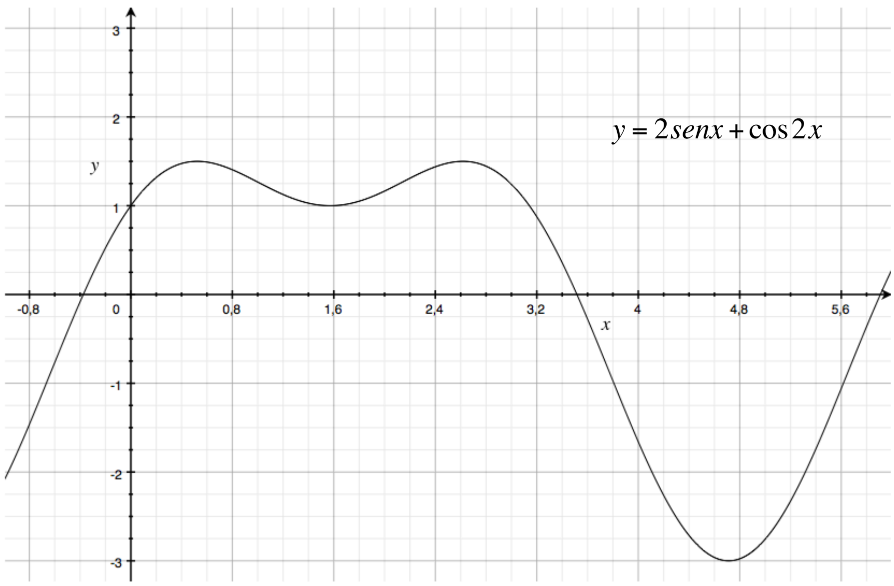


Figura 2-3. Gráfica de la función trigonométrica del ejemplo.

2.4 Estudio de las asíntotas

Una parte fundamental del estudio de una función es la determinación de sus asíntotas, es decir, aquellas rectas que no son cortadas por la función al tener esta un valor infinito. Podemos estudiar tres tipos de asíntotas: horizontales, verticales y oblicuas. A continuación vamos a estudiar la forma de hallar cada una de ellas.

a) *Asíntotas horizontales*

Para estudiar si una función tiene asíntotas horizontales bastará con que calculemos el límite cuando la variable independiente tiende a infinito (o menos infinito). Si obtenemos un valor real, ese valor de la función será la asíntota horizontal. En otras palabras:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ entonces en $y = L$ tenemos una asíntota horizontal.

Después del estudio de las asíntotas se hará un ejemplo completo del cálculo de las mismas.

b) *Asíntotas verticales*

Para encontrar las asíntotas verticales, hacemos que la función tome el valor infinito y buscamos qué valores de la variable x hacen eso posible. Si la función tiene un denominador, bastará con igualar el denominador a cero para hallar el valor de x. Si se trata de un logaritmo, sabemos que el logaritmo de 0 es menos infinito, etc.

c) *Asíntotas oblicuas*[4]

Sabemos que la ecuación de una recta es $y = mx + n$, donde m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen, es decir, donde la recta corta al eje OY. Bastará entonces calcular m y n para encontrar la ecuación de la recta, en nuestro caso, la ecuación de la asíntota.

Si trasladamos la recta al origen, cosa que se puede hacer con cualquier recta haciendo traslaciones horizontales y verticales, vemos que m es el cociente entre y y x. Como lo que buscamos el su valor en el infinito, es decir, el valor de la función cuando la variable independiente tiende a infinito, tenemos,

[4] Precaución: una asíntota oblicua puede ser cortada por la curva dependiendo de los límites por la izquierda y por la derecha. Puede detectarse un corte resolviendo el sistema formado por la ecuación de la curva y la recta asíntota oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x}$$

y el valor de n lo calculamos de igual forma:

$$n = \lim_{x\to\infty} (y - mx)$$

Veamos el cálculo de asíntotas sobre un ejemplo:

Ejemplo 4: *Calcular las asíntotas de la función:* $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

Primero, asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{x+1} = \infty$$

Por tanto, al no tener límite real, no hay asíntotas horizontales.

Segundo, asíntotas verticales:

$$y = \infty = \frac{(x-1)^2}{x+1} \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

Es decir, en x = -1 tenemos una asíntota vertical.

Y tercero, asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(x-1)^2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-2x}{x^2+x} = 1$$

Por tanto el valor de m = 1. Ahora calculamos el valor de n:

$$n = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(x-1)^2}{x+1} - 1.x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{(x^2+1-2x) - (x^2+x)}{x+1} \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+1}{x+1} = -3$$

Por tanto la ecuación de la recta asíntota es: $y = mx + n = x - 3$

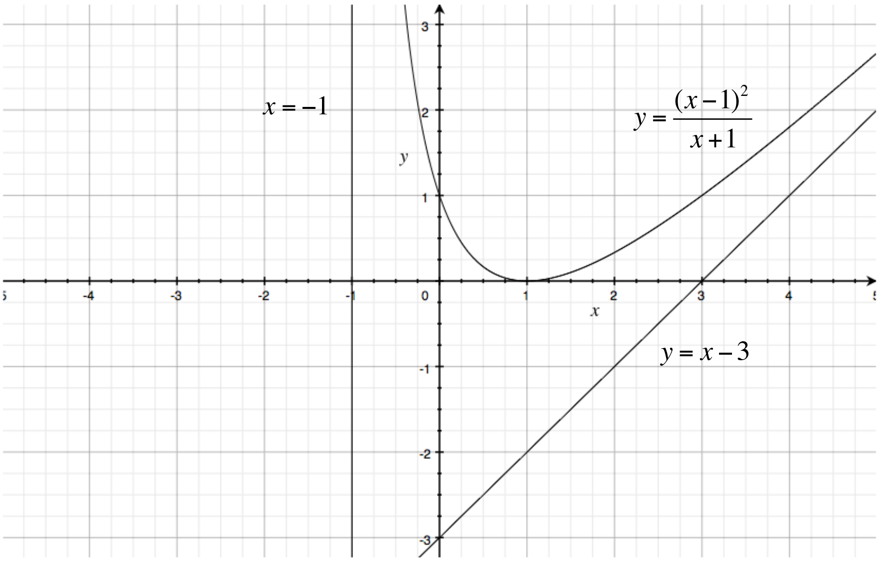


Figura 2-4. Asíntotas verticales y oblicuas

A continuación estudiaremos los cortes con los ejes OX y OY para la función a estudiar.

2.5 Corte con el eje OX

Para calcular el o los puntos de corte con el eje OX basta encontrar aquellos valores de x que hacen a la función tomar el valor cero.

$y=0;\ x=k;$ en el punto (k, 0) tenemos un punto de corte con el eje OX

2.6 Corte con el eje OY

Para calcular el o los puntos de corte con el eje OY deberemos encontrar los valores de la función cuando hacemos $x = 0$

$x=0;\ \mathrm{y}=r;$ en el punto (0, r) tenemos un punto de corte con el eje OY

Ejemplo 5: *En la función del ejemplo anterior, encontrar los puntos de corte con los ejes.*

Con el eje OX,

$$y=\frac{(x-1)^2}{x+1}=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Por tanto en el punto (1, 0) hay un punto de corte (como se observa en la *Figura* 2-4)

Con el eje OY,

$$y = \frac{(x-1)^2}{x+1}; x = 0 \Rightarrow y = \frac{(-1)^2}{1} = 1$$

Resultando que en el punto (0, 1) hay un punto de corte con *OY* (ver *Figura 2-4*)

Ejemplo 6 (completo)

Dibujar la gráfica de la función: $y = \frac{e^x}{e^x+2}$

a) *Dominio de la función*:

$$y = \frac{e^x}{e^x+2}; e^x+2 = 0; e^x = -2; x = L(-2)$$

Hay solución a la ecuación, por tanto la función existe en todo el campo real. Recuérdese que para determinar el dominio de la función hay que buscar aquellos puntos que hagan que la función no exista.

b) *Simetrías*:

$$OY: f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{1}{1+2e^x} \neq f(x)$$

$$OX: f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{1}{1+2e^x} \neq -f(x)$$

Por tanto, no hay simetrías con respecto a ninguno de los dos ejes.

c) *Máximos y mínimos*:

$$y' = \frac{e^x(e^x+2) - e^x e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+2)^2} = 0; 2e^x = 0; x = L0 = -\infty \qquad y = \frac{e^x}{e^x+2}; e^x+2 = 0; e^x = -2; x = L(-2)$$

No hay solución real, por tanto no hay ni máximos ni mínimos. Veamos si hay puntos de inflexión:

$$y'' = 2\left[\frac{2e^x - e^{2x}}{(e^x+2)^3}\right] = 0; 2e^x - e^{2x} = 0; 2e^x = e^{2x}; L2 + x = 2x \Rightarrow x = L2; y_{L2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto en el punto (L2, 1/2) tenemos un punto de inflexión

d) *Asíntotas*:

Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+2} = 1$

Por tanto en $y = 1$ tenemos una asíntota horizontal (ver oblicuas).

Y también, $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + 2} = 0$. Por tanto tenemos otra asíntota horizontal en $y = 0$

Verticales: No tiene solución real. No hay asíntota (ver estudio del dominio de la función)

Oblicuas:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 2} : x = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{xe^x + 2x} = 0$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x + 2} - 0.x = 1$$

que coincide con la asíntota horizontal ya conocida.

e) *Cortes con los ejes*:

$$x = 0; y = \frac{e^0}{e^0 + 2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto en el punto (0, 1/3) corta al eje OY.

A continuación se presenta la gráfica de la función propuesta para el estudio:

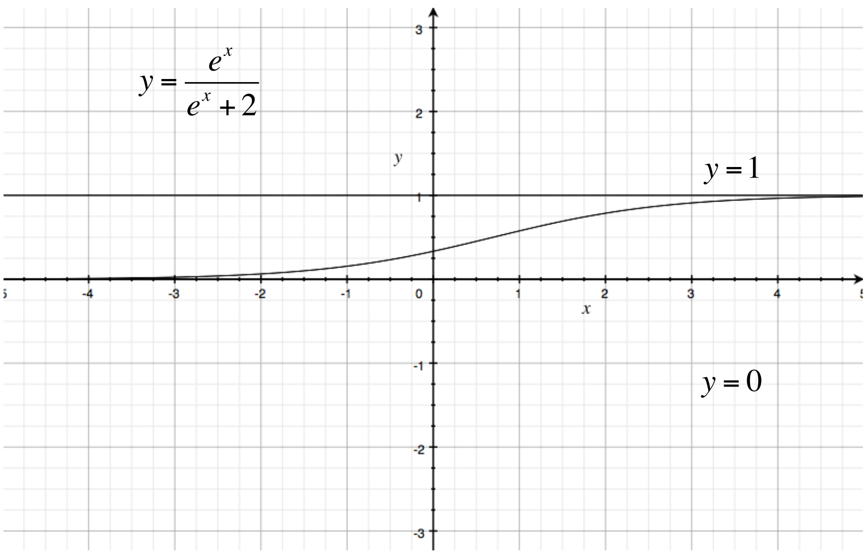


Figura 2-5. Representación de la función del Ejemplo 6

<u>Ejemplo 7 (completo)</u>

Estudiar y dibujar la función: $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$

a) *Dominio*: Existe en todo el campo real excepto en $\{0\}$

b) *Simetrías*:

$f(x)=\dfrac{3(-x)^4+1}{(-x)^3}\neq f(-x)$. No hay simetría con respecto a OY.

$f(-x)=\dfrac{3(-x)^4+1}{(-x)^3}=-\dfrac{3(x)^4+1}{(x)^3}=-f(x)$. Hay simetría respecto al origen.

c) *Máximos y mínimos:*

$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3};y'=\dfrac{3x^4-3}{x^4}$

$3x^4-3=0;x^4=1\Rightarrow\begin{Bmatrix}x=\pm 1\\ x=\pm i\end{Bmatrix}$

Estudiamos los puntos de inflexión y en qué valores hay máximos y mínimos:

$y'=\dfrac{3x^4-3}{x^4};y''=\dfrac{12}{x^5}$

$\begin{Bmatrix}y''_{(1)}=12>0\Rightarrow \textit{mínimo}\\ y''_{(-1)}=-12<0\Rightarrow \textit{máximo}\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}y_{(1)}=4\\ y_{(-1)}=-4\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}(1,4)\rightarrow \textit{mínimo}\\ (-1,-4)\rightarrow \textit{máximo}\end{Bmatrix}$

No hay puntos de inflexión.

d) Asíntotas:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+1}{x^3}=\infty$. No hay asíntotas horizontales.

En x = 0, asíntota vertical.

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+1}{x^3}:x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+1}{x^4}=3;\quad m=3$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+1}{x^3}-3x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$

Asíntota oblicua en $y=3x$

e) Cortes con los ejes:

Si x = 0 entonces y es infinito, por tanto, no hay corte con eje *OY*.

Si y = 0 la ecuación del numerador no tiene solución real. No hay corte con el eje *OX*.

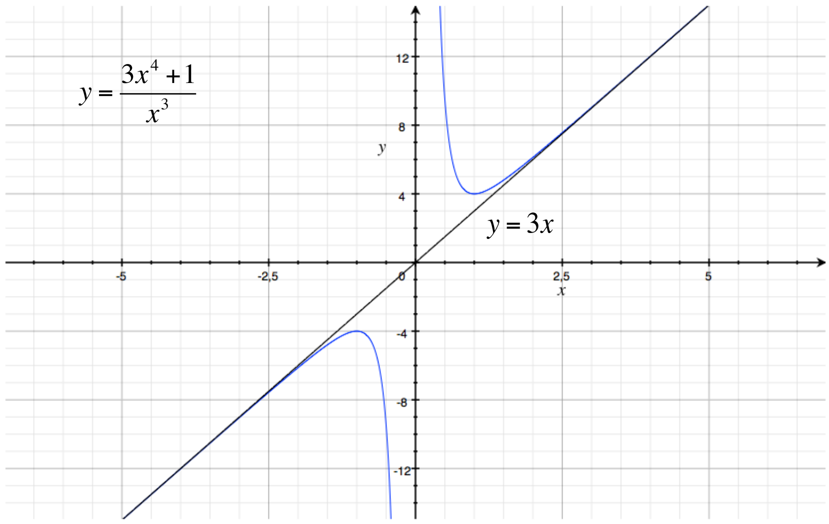


Figura 2-6. Representación de la función del Ejemplo 7

<u>Ejemplo 8 (completo)</u>

Estudiar y dibujar la función: $y = e^{-x^2}$

a) *Dominio o campo de existencia:* No hay ningún valor que haga a la función imaginaria o infinito. Existe en todo el campo real.

b) *Simetrías*:

OY: $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$. Hay simetría respecto a OY.

c) *Máximos y mínimos:*

$$y' = -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow x = \infty \end{array} \right\}$$

Con $x = 0$ no podemos determinar si se trata de un máximo o un mínimo.

Hallamos la segunda derivada:

$$y'' = -2\left[e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2})\right] = -2e^{-x^2}(1-2x^2) = 2e^{-x^2}(2x^2-1) = 0 \left\{ \begin{array}{l} e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = \infty \\ 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Por tanto hay dos puntos de inflexión en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$

d) *Asíntotas*:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

Por tanto hay una asíntota horizontal en $y = 0$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas (el alumno debería probar esta afirmación).

e) *Cortes con los ejes:*

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{e^0} = 1$. Hay un corte en (0, 1).

Si analizamos detenidamente la primera derivada, podemos observar que:

Si $x < 0,\ y' > 0$, es decir, la función crece.
Si $x > 0,\ y' < 0$, es decir, la función decrece.

Por tanto en ese punto tenemos un máximo.

Ya podemos dibujar la gráfica de la función, que es la conocida campana de Gauss.

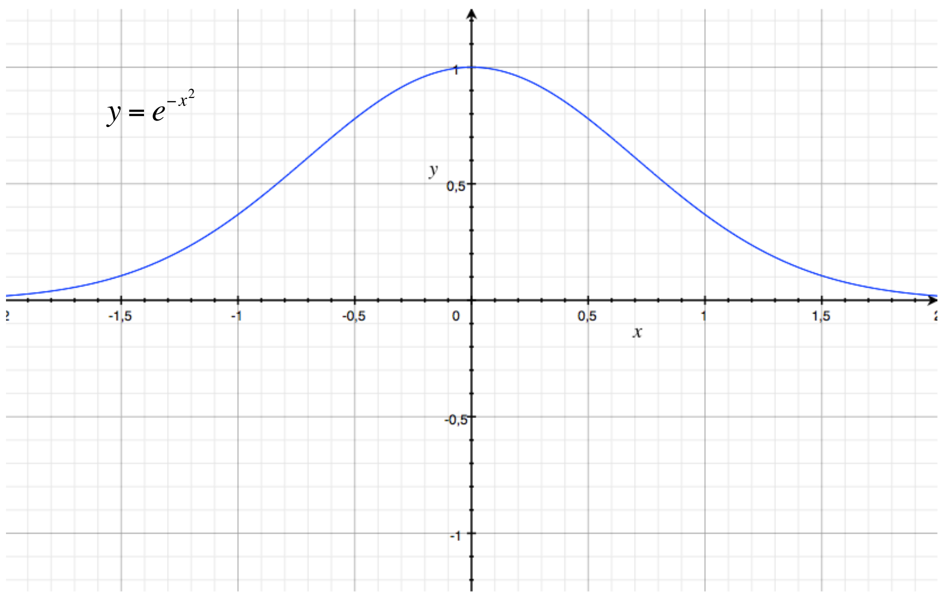


Figura 2-7 Representación de la función del Ejemplo 8

3.- Empleo de MATLAB para el estudio de funciones y sus gráficas

MATLAB se caracteriza por su gran potencia para el trazado de todo tipo de curvas y para el cálculo matricial. Aunque el segundo no es objeto de este estudio, veremos que su conocimiento y utilización puede simplificarnos enormemente la tarea. Además, MATLAB posee la capacidad de resolución analítica (simbólica) de problemas, esto es, es capaz de realizar, por ejemplo, una derivada de forma simbólica como si la hiciéramos con papel y lápiz. Además es posible simplificar las expresiones obtenidas para una mejor presentación.
Veamos un primer ejemplo: queremos derivar la función de Gauss del Ejemplo 8[5]

```
1 >> syms e x
2 >> diff(e^(-x^2))
3 ans =
4 -(2*x*log(e))/e^(x^2)
5 >> pretty(ans)
    2 x log(e)
  - ----------
         2
        x
       e
```

En la línea 1 declaramos como simbólicas las variables *x* y *e*. Aunque *e* no sea específicamente una variable, MATLAB necesita saber que forma parte de la expresión para poder derivarla. Esto lo hacemos mediante el comando `syms` que será utilizado en múltiples ocasiones.

En la línea 2 utilizamos la función `diff` que es la encargada de hacer la derivada de la función que se encuentra en su interior. Se recomienda consultar la ayuda sobre esta función mediante el comando `help  diff` ya que tiene muchas posibilidades y será utilizado de múltiples formas (véase, p.e. Tema 5).

La línea 3 nos presenta la variable genérica de respuesta `ans` a la que se le asigna el valor del resultado obtenido. En la línea 4 tenemos la derivada. Aquí hay que hacer una salvedad: MATLAB considera el número *e* como una variable, y como tal la interpreta en el resultado. La función `log` en MATLAB representa el logaritmo natural (neperiano) y por tanto, `log(e)` es igual a 1.

5 Los números delante de que cada sentencia de MATLAB no pertenecen a la solución. Están puestos para facilitar la explicación posterior.

Y por fin, en la línea 5, llamamos a la función `pretty` que es la encargada de dar forma al resultado para hacerlo más legible. Podemos comparar el resultado con el obtenido en el ejemplo 8.

Para probar la potencia de MATLAB, y utilizando el resultado obtenido, podemos calcular la segunda derivada y compararla con la obtenida en el ejemplo:

```
1 ans =
2 -(2*x*log(e))/e^(x^2)
3 >> diff(ans)
4 ans =
5 (4*x^2*log(e)^2)/e^(x^2) - (2*log(e))/e^(x^2)
6 >> pretty(ans)
      2        2
  4 x  log(e)     2 log(e)
  ------------ - --------
        2             2
       x             x
      e             e
7 >> simplify(ans)
8 ans =
(2*log(e)*(2*log(e)*x^2 - 1))/e^(x^2)
```

En esta ocasión, además de calcular la segunda derivada -líneas 1 a 6-, hemos utilizado un nuevo comando que será de mucha utilidad para posteriores estudios: `simplify`. Este comando simplifica la expresión obtenida para hacerla lo más sencilla posible. Vemos que el resultado, si obviamos el `log(e)` que sabemos que es 1, es la misma que la obtenida en el Ejemplo 8, como no podía ser de otra manera.

Otra función interesante que nos puede ayudar en la resolución de este tipo de problemas es la función `solve`. Una vez más animamos a consultar la ayuda de MATLAB para analizar todas las opciones disponibles.

La función `solve` es muy versátil y, en general, sirve para resolver todo tipo de ecuaciones. Esto se verá mejor con un ejemplo:

```
>> solve('2*x^2-1=0', x)
ans =
  2^(1/2)/2
 -2^(1/2)/2
```

En el caso anterior queremos resolver la ecuación $2x^2 - 1 = 0$. La función `solve` en su enunciado nos pide sobre qué variable queremos trabajar; en este caso sólo hay una, *x*. Veamos otro ejemplo. En la página 12 encontramos la ecuación:

$$2e^x - e^{2x} = 0$$

Dejemos a MATLAB la resuelva:

```
>> solve('2*exp(x)- exp(2*x)=0', x)
ans =
log(2)
```

Solución que coincide con la que vimos en el *Ejemplo 6*. (Recuérdese que para MATLAB, la función `log` significa logaritmo natural o neperiano, así como `log2` y `log10` significan "logaritmo en base 2" y "logaritmo en base 10" respectivamente).

Y tomando una ecuación del *Ejemplo 7* (pág.13):

```
1 >> sol = (solve('x^4=1', x))'
2 sol =
[ 1, -1, -i, i]
3 >> sol(3)
4 ans = -i
```

En el ejemplo anterior hemos hecho algunas modificaciones a la forma normal de trabajar: en la línea 1 llamamos a la función `solve` pero enviamos el resultado a la variable `sol` y además queremos que la respuesta sea un vector fila, no columna como se proporciona por defecto. Esto es lo que encontramos en la línea 2. En la línea 3, accedemos a la tercera solución de la ecuación cargada en la variable vector `sol` y la respuesta nos la proporciona en la línea 4. Esto puede ser muy interesante cuando escribamos un *script* o programa en el que queramos tratar cada una de las soluciones de forma separada. Se recomienda consultar en la ayuda la función `size`.

En algunas ocasiones deberemos encontrar el o los puntos de intersección entre dos curvas o una curva y una recta, dicho matemáticamente, deberemos resolver un sistema de ecuaciones. Veamos esto con un ejemplo:

```
1>> syms x y
2>> [sol_x, sol_y]=solve('y=(x-1)^2/(x+1)', 'y=x+1')
```

```
3 sol_x = 0
4 sol_y = 1
```

En la línea 1 declaramos x e y como variables simbólicas. En la línea 2 asignamos las posibles soluciones al sistema de ecuaciones a dos variables que hemos llamado `sol_x` y `sol_y`. Esto hay que hacerlo ya que MATLAB necesita asignar las soluciones a variables que a priori no conoce. En las líneas 3 y 4 obtenemos el punto de intersección (0, 1).

Cuando estudiamos las asíntotas, debemos analizar y resolver algunos límites. Como era de esperar, MATLAB nos ayuda también con esa tarea. Lo veremos sobre un ejemplo.

En el *Ejemplo nº7* buscamos las asíntotas horizontales:

```
>> limit('exp(-(x^2))', x, inf)
ans = 0
```

También podemos calcular el límite cuando x tiende a un valor por la izquierda y por la derecha:

```
>> limit('(x-1)^2/(x+1)', x, -1)
ans = NaN
>> limit('(x-1)^2/(x+1)', x, -1, 'left')
ans = -Inf
>> limit('(x-1)^2/(x+1)', x, -1, 'right')
ans = Inf
```

Y con otro ejemplo, comprobamos también que la función no es continua al no coincidir sus límites por la izquierda y por la derecha:

```
>> limit('exp(1/x)', x, 0, 'right')
ans = Inf
>> limit('exp(1/x)', x, 0, 'left')
ans = 0
```

(Recuerde siempre que la variable x debe ser declarada como simbólica (`syms`) antes de cada cálculo de límite si se ha cerrado la sesión aunque guardemos el espacio de trabajo).

Por último, nos queda por estudiar el comando que permite el trazado de la función estudiada. MATLAB dispone de dos comandos generales: `plot` y `ezplot`.

El primer comando, `plot`, puede utilizarse para el trazado general de funciones, sin necesidad de que la función sea definida de forma simbólica. La forma normal de uso es proporcionando un vector de recorrido a la variable independiente x y dando a la función y su valor. Por ejemplo,

```
1 >> x = -pi:.1:pi;
2 >> y = sin(2*x);
3 >> plot(x,y)
4 >> ylabel('Valor de la Función');
5 >> xlabel('Radianes');
6 >> title('y = sen(2x)');
7 >> grid on;
```

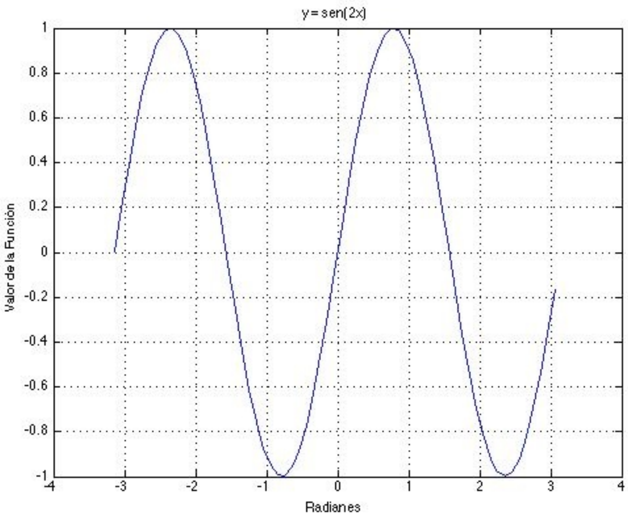


Figura 2-8. Representación de la función y = sen $2x$

En la primera línea establecemos el recorrido de la variable x. Esto, en algunas ocasiones, puede ser difícil, pero cuando estamos estudiando una función la labor se hace más fácil ya que antes de dibujarla conoceremos ya sus puntos característicos, asíntotas, etc. Más tarde se verá otra forma de representar la función sin conocer su recorrido. En la línea 2 definimos la función a representar. La función `plot` se invoca en la línea 3. Las líneas 4, 5 y 6 hacen más legible la figura añadiendo textos a los ejes y a la función. En la última línea hacemos visible la rejilla en el dibujo para una mejor visualización.

Podemos poner varias funciones en una misma gráfica:

```
>> x = -pi:.1:pi;
>> y = sin(2*x);
```

```
3 >> z = cos(2*x);
4 >> plot(x,y,x,z)
5 >> ylabel('Valor de la Función');
6 >> xlabel('Radianes');
7 >> title('Dos funciones en una misma gráfica');
8 >> legend('sen 2x', 'cos 2x');
9 >> grid on;
```

Analícense con detenimiento las líneas 3, 4 y 9.

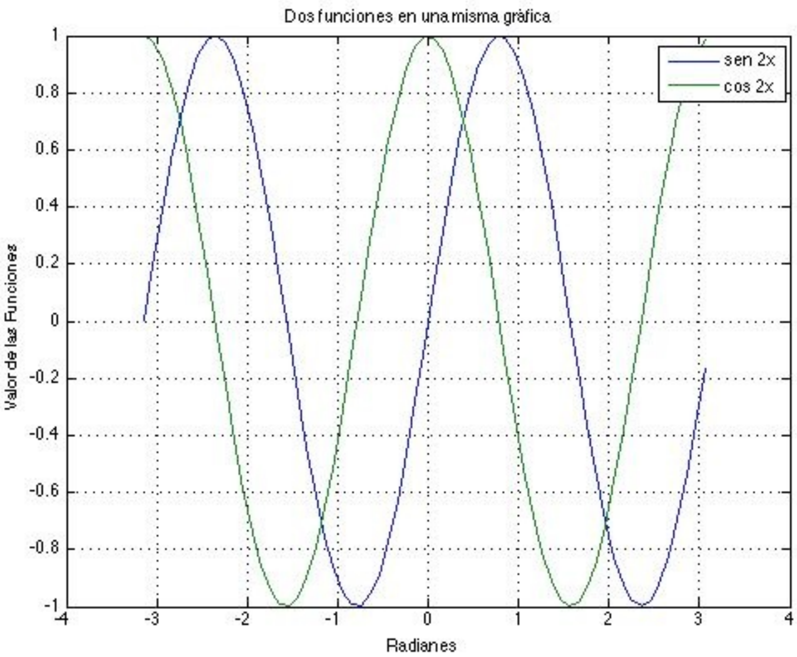


Figura 2-9. Representación dos funciones en una misma gráfica para permitir su comparación.

Esta capacidad puede venir muy bien en según qué casos. Considérese la siguiente función:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1 - x^2 \ \text{si } x < 1 \\ x^2 \ \text{si } x \geq 1 \end{Bmatrix}$$

Podemos representarla en una misma figura con el siguiente código[6]:

```
>> x1 = -3:.1:.9;
>> x2 = 1.1:.1:5;
>> y = 1-x1.^2;
>> z = x2.^2;
>> plot(x1, y, x2, z)
```

[6] Omitimos los comandos de definición de ejes, título, leyenda y rejilla por ser ya conocidos. Recuerde que en la introducción se estudió también otra forma de representar estas funciones condicionales.

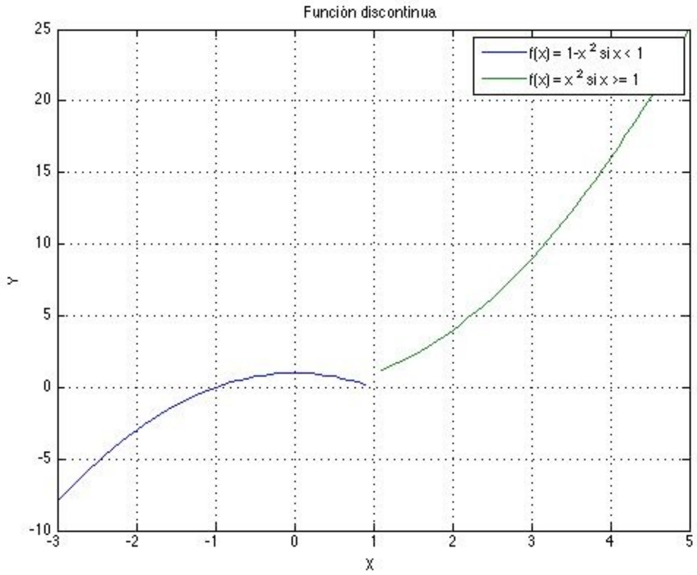


Figura 2-10. Representación de una función discontinua con dos trazos diferenciadores a cada lado de la discontinuidad.

Si queremos representar una función desde el módulo de cálculo simbólico, podemos utilizar la función `ezplot`.

```
>> syms x y
>> h = ezplot('y=x/(x^3 - 4*x)');
>> set(h, 'Color', 'b');
>> grid on
```

Sin embargo, con `ezplot` no podemos representar simultáneamente varias funciones en el mismo gráfico como lo hacíamos con `plot` (debe utilizarse en su lugar `hold on`). La función queda como se ve en la siguiente figura:

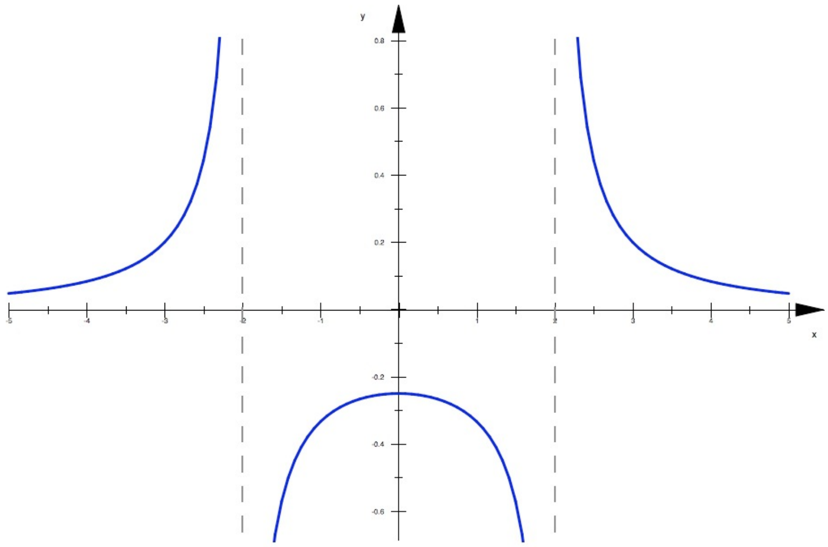


Figura 2-11. Ejemplo de representación usando MuPad.

Hay otros comandos de MATLAB que pueden resultar útiles para trabajar con funciones de forma simbólica: `expand` y `simplify`.

El primero realiza las operaciones que se le presentan. Un ejemplo donde se quieren realizar dos operaciones simultáneas y devuelve un vector con ambos resultados separados por comas:

```
>> expand([(x+1)*(y+z) (x+1)^2])
ans = [ y + z + x*y + x*z, x^2 + 2*x + 1]
```

Otro ejemplo:

```
>> expand(sin(x+y))
ans = cos(x)*sin(y) + cos(y)*sin(x)
```

El comando `simplify` simplifica las expresiones que se le indican. En el siguiente ejemplo se simplifican simultáneamente cuatro expresiones:

```
>> simplify([(x^2 + 5*x + 6)/(x + 2), sin(x)*sin(2*x) + cos(x)*cos(2*x);
(exp(-x*i)*i)/2 - (exp(x*i)*i)/2, sqrt(16)])
ans =
[   x + 3, cos(x)]
[  sin(x),      4]
```

4.- Ejemplos de trazado de curvas en explícitas usando MATLAB

<u>Ejercicio Resuelto nº 1</u>

Dibujar la curva $y = x^5 + 3x + 5$

Hagamos un primer trazado para ver cómo es la curva:

```
>> syms x;
>> ezplot('x^5 +3*x+5');
>> grid on
```

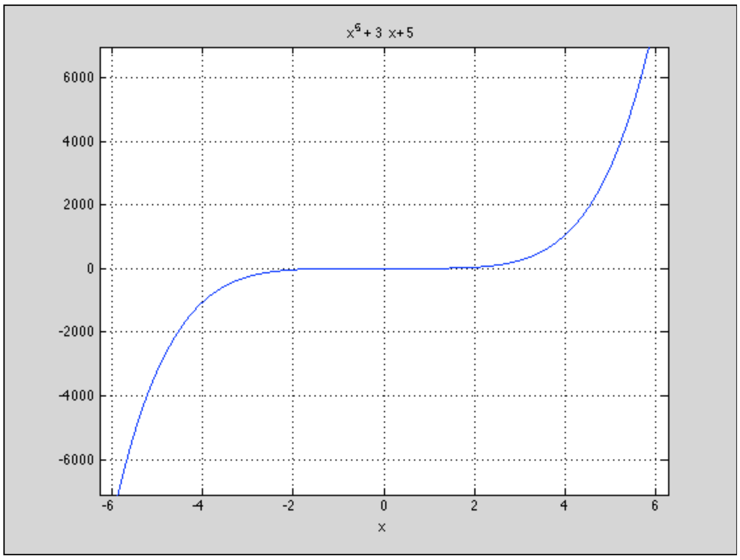


Figura 2-12. Función polinómica del ejercicio resuelto 1.

Analizando la figura obtenida observamos que la curva corta tanto al eje *OY* como al eje *OX*.

Ambos puntos de corte pueden ser obtenidos por MATLAB y luego representados gráficamente:

Aunque en este caso el punto de corte con *OY* sea trivial (y = 5), veamos cómo hacerlo con MATLAB para otros casos:

```
>> syms x y
>> sol = solve('y=x^5 +3*x+5', x==0)
sol =

    x: [1x1 sym]
    y: [1x1 sym]

>> [sol.x]
ans = 0
>> [sol.y]
ans = 5
```

Por tanto, en el punto (0, 5) la curva corta al eje *OY*.

Para hallar el punto de corte con el eje *OX*, resolvemos la ecuación con y = 0:

```
>> solve('x^5 +3*x+5')
```

```
% También podría ponerse solve('y=x^5 +3*x+5', y==0)
ans=                       % Se omiten decimales para mayor claridad
-1.108...
   1.193... - 0.996...*i
 - 0.639... + 1.206...*i
 - 0.639... - 1.206...*i
   1.193... + 0.996...*i
```

De las cinco soluciones, sólo la primera es real; por tanto el punto de corte es (1.11, 0).

Para verlo en una figura, deberemos dibujar la gráfica en un intervalo cuya escala nos permita hacerlo visible. Podemos elegir el intervalo [-2, 2]:

```
>>ezplot('x^5 +3*x+5', [-2 2])
```

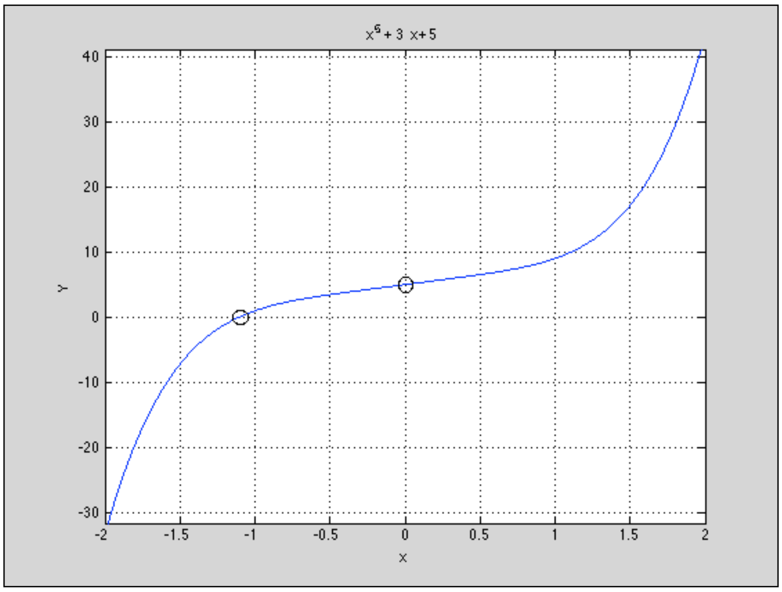


Figura 2-13. Visualización de los cortes con los ejes del ejercicio resuelto 1.

Ejercicio Resuelto nº 2

Dibujar la función: $y = \dfrac{x(x^2-9)}{x^2-1}$

La función existe en todo el campo real excepto en los puntos +1 y -1 que anulan el denominador. El alumno puede utilizar la función `solve` para comprobar esto último.

Podemos ver que la función es impar (simétrica respecto al origen) utilizando la función `simplify`:

```
>> syms x
>> simplify(((-x)^3 - 9*(-x))/((-x)^2 - 1))
ans = -(x*(x^2 - 9))/(x^2 - 1)
>> pretty(ans)
        2
    x (x  - 9)
  - ----------
        2
       x  - 1
```

Por tanto se verifica que $f(-x) = - f(x)$

Para estudiar las asíntotas verticales y horizontales, procedemos del modo siguiente:

```
>> solve('x^2 - 1')
ans =

  1
 -1
```

Por tanto tenemos asíntotas verticales en $x = 1$ y en $x = -1$.

```
>> limit((x^3 - 9*x)/(x^2 - 1), inf)
ans = Inf
```

No existe el límite, por tanto no hay asíntotas horizontales.

Para hallar las asíntotas oblicuas, si existen, calculamos los dos límites para m y n.

```
>> m = limit(((x^3 - 9*x)/(x^2 - 1))/x, inf)
m = 1
>> n = limit((x^3 - 9*x)/(x^2 - 1) - x, inf)
n = 0
```

Por tanto existe una asíntota oblicua en $y = x$.

Y los cortes con los ejes los calculamos del siguiente modo:

```
>> solve('x^3 - 9*x') % también podríamos poner solve(x^3 - 9*x, y==0)
ans' = [ 0, 3, -3] % calculo la traspuesta de la solución por comodidad
```

Tenemos entonces tres puntos de corte con el eje *OX*: (-3, 0), (0, 0) y (3, 0).

Calculamos ahora los máximos, mínimos, y puntos de inflexión, si existen:

```
>> diff((x^3 - 9*x)/(x^2 - 1))

ans =(3*x^2 - 9)/(x^2 - 1) + (2*x*(- x^3 + 9*x))/(x^2 - 1)^2

>> simplify(ans)

ans =(x^2 + 3)^2/(x^2 - 1)^2

>> pretty(expand((x^2 + 3)^2/(x^2 - 1)^2))

           2               4
        6 x               x                9
  ------------- + ------------- + -------------
    4       2       4       2       4       2
   x  - 2 x  + 1   x  - 2 x  + 1   x  - 2 x  + 1

% Igualamos la primera derivada a cero para ver los resultados:

>> solve(((x^2 + 3)^2/(x^2 - 1)^2))

ans = [ -3^(1/2)*i, -3^(1/2)*i, 3^(1/2)*i, 3^(1/2)*i]

% Todas las raíces son imaginarias, por tanto, no hay máximos ni
% mínimos.

% Para ver si hay puntos de inflexión, igualamos la segunda derivada a
% cero:

>> simplify(diff((x^3 - 9*x)/(x^2 - 1), 2)) % derivamos y simplificamos

ans = -(16*x*(x^2 + 3))/(x^2 - 1)^3

>> solve(-(16*x*(x^2 + 3)))

ans' = [ 0, -3^(1/2)*i, 3^(1/2)*i]

% Sólo una solución es real x = 0 y, por tanto, y =0. Hay un punto de
% inflexión
% en (0, 0).
```

Ahora ya estamos en condiciones de dibujar la gráfica completa con todos sus puntos significativos y asíntotas.

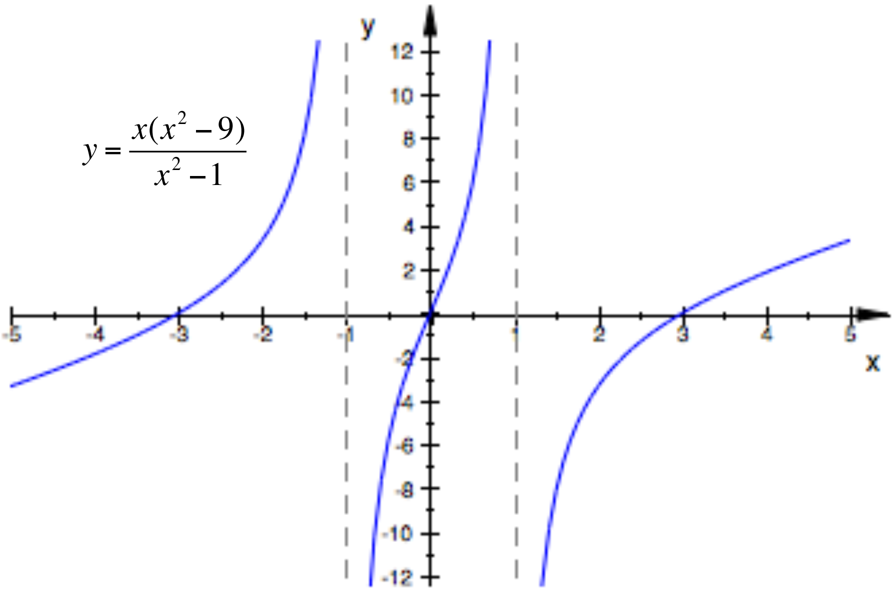


Figura 2-14. Visualización de la función del ejercicio resuelto 2.

Ejercicio Resuelto nº 3

Estudiar y dibujar la función: $y = -4\,sen(1-x)$

Es una función periódica que existe en todo el campo real. Sólo será necesario estudiarla entre [-2π, 2π] (o [0, 2π]).

No presenta simetrías ni asíntotas (se deja como ejercicio al alumno).

A continuación se estudian cortes con los ejes, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

```
% Cortes con los ejes

>> a = -4*sin(1)
a = -3.3659                    % Corte con el eje OY en (0, a)
>> sol = solve('-4*sin(1-x)')
sol = 1                  % Corte con el eje OX en 1 + K*pi
% Hallamos la primera derivada y la igualamos a cero. Con el valor
% obtenido lo introducimos en la segunda derivada. Si es menor que
% cero, el punto es un máximo.
>> diff(-4*sin(1-x))
ans = 4*cos(x - 1)
```

```
>> solve(ans)
ans = pi/2 + 1
>> x1 = ans      % Por claridad creamos la variable x1 con el valor
x1 = pi/2 + 1         % obtenido del resultado anterior
>> diff(-4*sin(1-x), 2)     % Cálculo de la segunda derivada
ans = -4*sin(x - 1)

>> b = -4*sin(x1 -1)  % Sustituimos el valor de x1 calculado
b = -4     % Al ser menor que cero, es un máximo en (pi/2 +1,4)
% El punto de inflexión lo obtenemos igualando la segunda derivada
% a cero:
>> solve(-4*sin(x - 1))
ans = 1
% Por tanto en (1, 0) tenemos el punto de inflexión.
% Ya se puede obtener la gráfica:
>> ezplot('-4*sin(1-x)', [-5 5])
```

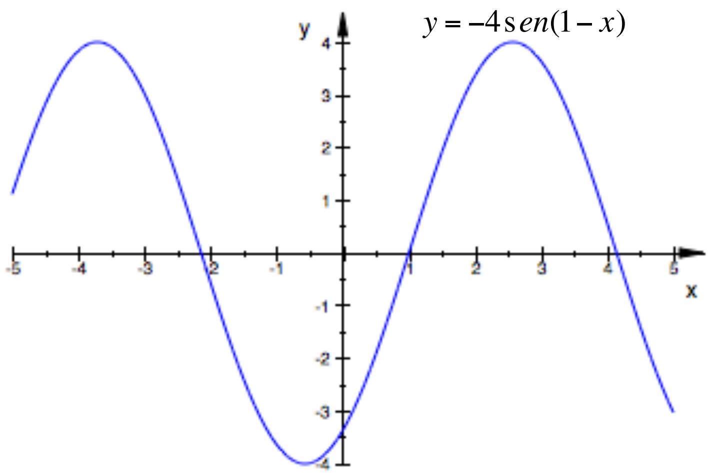


Figura 2-15. Representación de la función del ejercicio 3.

Se propone como ejercicio hacer un estudio completo de las funciones enunciadas en el Ejercicio 1 (página 3).

5.- Trazado de curvas en coordenadas implícitas, paramétricas y polares

En determinados entornos es frecuente encontrarse con funciones definidas de forma implícita, paramétrica o por polares. Con MATLAB pueden representarse cada una de ellas con las funciones que hemos visto hasta el momento, excepto las funciones en polares que tienen su forma de representación específica.

Para representar una **función que se encuentra en forma implícita**, podemos utilizar el comando `ezplot` como hemos venido haciendo hasta el momento. Lo vemos con un ejemplo:

Representar la función $x^2 - y^4 = 0$

```
% Representación de la función x^2 - y^4  = 0
>> h = ezplot('x^2 - y^4')
>> set(h, 'color', 'b')
>> grid on
```

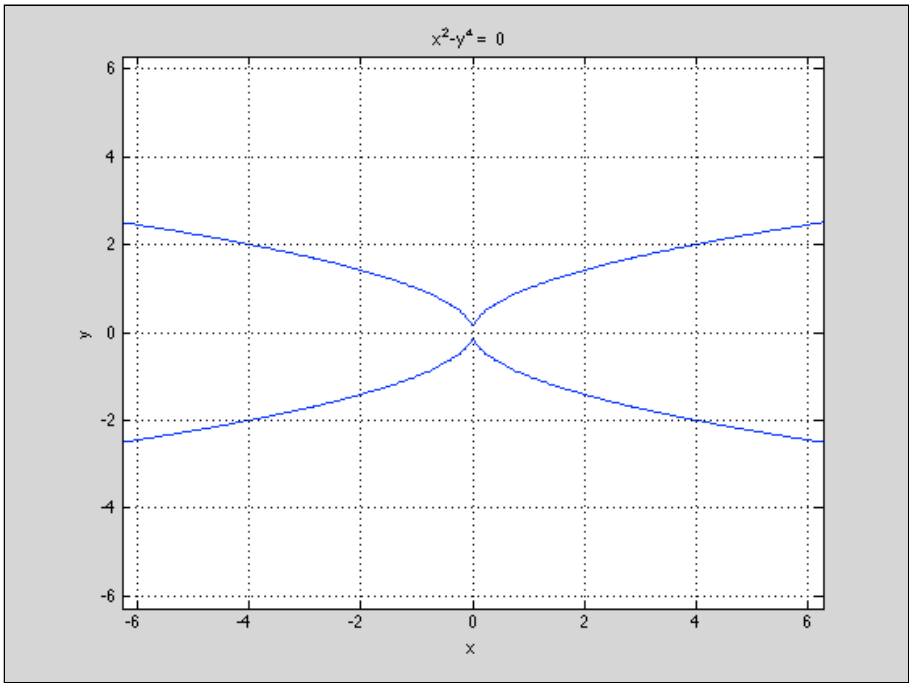


Figura 2-16. Representación de una función dada en implícitas

Hay que tener presente que toda función en explícitas puede ponerse en implícitas, pero lo contrario no siempre es posible.

Otro ejemplo:

Representar la función $y^6 - y - x^2 = 0$ y la función $y - x - \frac{1}{4}\sin y = 0$

```
% Ambas funciones no pueden representarse en forma explícita.
>> h = ezplot('y^6-y-x^2');
>> set(h, 'color', 'b')          % Dibujamos en azul
>> grid on                       % Ponemos la rejilla
>> hold on                       % Ambas funciones en la misma figura
>> g = ezplot('y-x-(1/4)*sin(y)');
>> set(g, 'color', 'r')          % Dibujamos en rojo
```

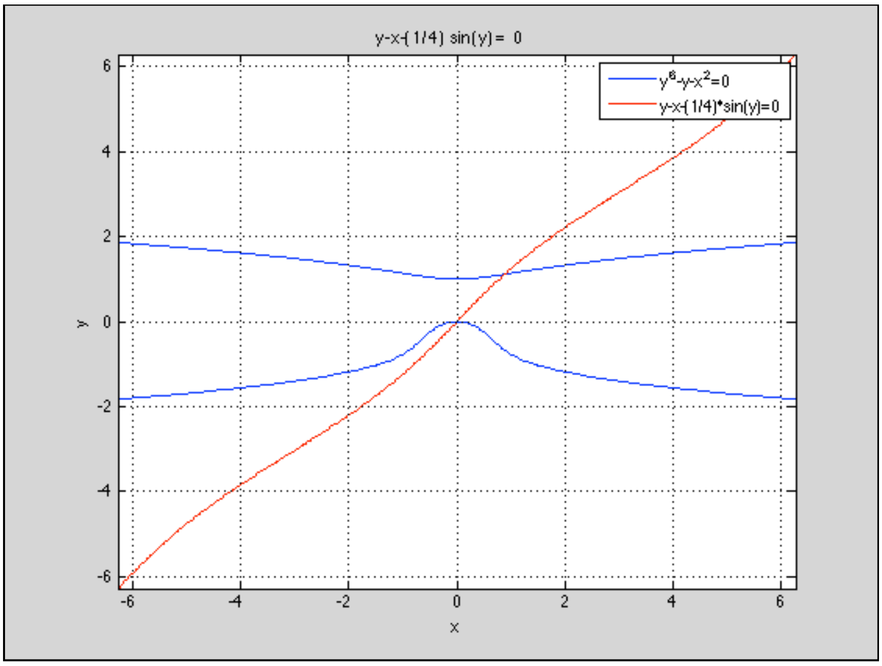


Figura 2-17. Representación de dos funciones dadas en implícitas que no admiten su transformación a explícitas.

La representación de **funciones en forma paramétrica** se realiza con la función `plot` o con la función `ezplot`, indistintamente. La única dificultad que podemos encontrar es la definición explícita del campo de variación del parámetro t. Normalmente dicho parámetro suele variar entre 0 y 2π, pero podrá haber casos especiales. El contexto del problema podrá darnos pistas de la variación de t. Veamos algunos ejemplos:

Representar la función: $\begin{cases} x(t) = 4\cos t - \cos 4t \\ y(t) = 4\sin t - \sin 4t \end{cases}$

Para ver el uso de `plot` y de `ezplot` simultáneamente, dibujaremos la misma función con una ligera variación en el segundo comando:

```
% Uso de plot y ezplot para dibujar funciones en forma paramétrica
>> hold on
>> t = 0:0.1:2*pi;      % Es importante acabar en ';' para evitar que se
                        % listen todos los valores del recorrido de 't'.
>> x = 4*cos(t)-cos(4*t);
>> y = 4*sin(t)-sin(4*t);
>> plot(x,y)
% Superponemos una nueva figura usando ezplot. Obsérvese que se ha
% cambiado el coeficiente 4 por un 5:
>> h = ezplot('5*cos(t)-cos(5*t)', '5*sin(t)-sin(5*t)', [0,2*pi]);
>> set(h, 'color', 'r')     % La nueva función se traza en rojo
```

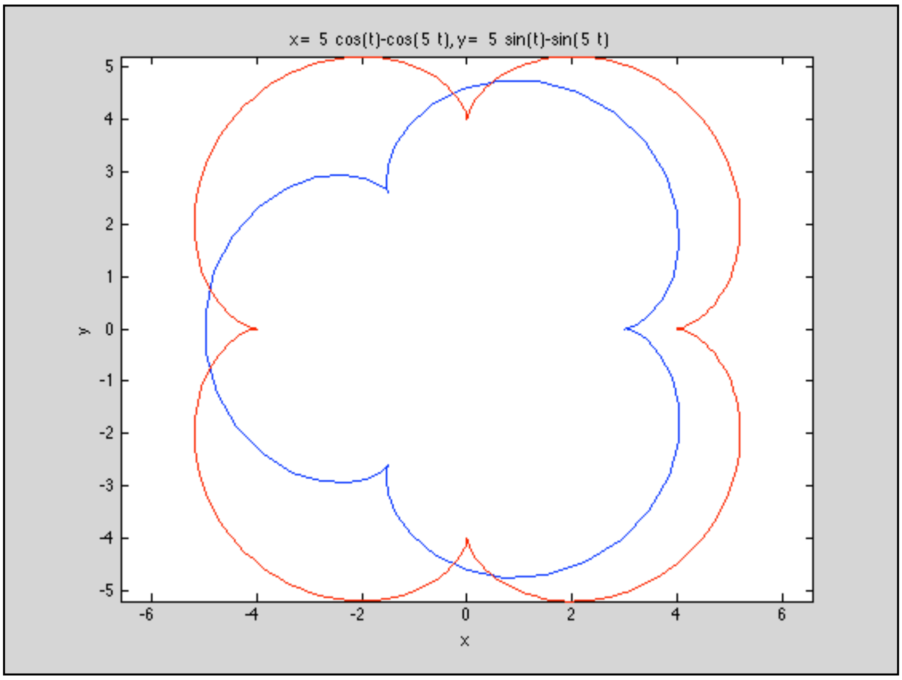


Figura 2-18. Representación de dos funciones dadas en paramétricas con `plot` *y* `ezplot`

El siguiente ejemplo nos va a permitir usar unas funciones de MATLAB que pueden resultar útiles cuando pasamos del mundo simbólico o analítico al mundo numérico. Las funciones que utilizaremos en este ejemplo son: `sym2poly`, que transforma un polinomio en formato simbólico en un polinomio expresado por el vector de sus coeficientes de forma descendente. `polyval`, que recorre un polinomio con todos los valores de la variable independiente que enviamos como parámetro y devuelve dichos valores de recorrido. `max` nos devolverá el valor máximo de los valores de un polinomio recorrido con su variable independiente. Adicionalmente, usaremos `subplot`, que nos permitirá presentar diferentes ventanas simultáneamente con las gráficas que estemos queriendo representar.

"El globo meteorológico"

Se usan globos meteorológicos para obtener datos de temperatura y presión a diferentes alturas de la atmósfera. El globo se eleva porque la densidad del helio en su interior es menor que la del aire que rodea al globo. Al subir el globo, el aire circundante se vuelve menos denso y el ascenso se va frenando hasta que el globo alcanza un punto de equilibrio. Durante el día, la luz del Sol calienta el helio del interior del globo; el helio se expande y se vuelve menos denso y el globo sube más. Durante la noche, por el contrario, el helio del globo se enfría y se vuelve más denso y el globo desciende a una altura menor. Al día siguiente, el Sol caliente el helio otra vez y se repite el ciclo. Este proceso genera una serie de mediciones de altura con el transcurso del tiempo que se pueden aproximar con una ecuación polinómica.

Supongamos que el siguiente polinomio representa la altura en metros durante las primeras 48 después del lanzamiento del globo meteorológico:

$$h(t) = -0.12t^4 + 12t^3 - 380t^2 + 4100t + 220$$

donde las unidades de t son horas. Generar las curvas de altura, velocidad y aceleración de este globo usando las unidades de metros, metros por segundo y metros por segundo al cuadrado, respectivamente. Determinar la altura máxima del globo y a la hora que se produjo.

Solución

Calcularemos primero el vector de alturas, de velocidad (derivada de la altura con respecto al tiempo) y de aceleración (derivada de la velocidad con respecto al tiempo). Estableceremos la variable *t* cuya duración es de 48 horas; actuará de variable independiente. Determinaremos los valores de cada uno de los polinomios (altura, velocidad y aceleración) para cada uno de los valores de la variable *t* y los representaremos. Hay que tener presente que la velocidad es pedida en *m/s* y la aceleración en m/s^2; hay que transformar los datos iniciales que nos vienen dados en horas.

```
% Calculamos la altitud, velocidad y aceleración...

clear all         % Limpiamos variables para que no haya interferencias

syms t            % Declaramos simbólica t para la derivación

altitud = -0.12*t^4 + 12*t^3 - 380*t^2 + 4100*t + 220;

velocidad = diff(altitud, 't');

aceleracion = diff(velocidad, 't');

% Establecemos el recorrido de la variable t (48 horas)

t = [0:0.1:48];

% Transformamos los coeficientes simbólicos en coeficientes numéricos

coef_alt = sym2poly(altitud);

coef_vel = sym2poly(velocidad);

coef_ace = sym2poly(aceleracion);

% Dibujamos las gráficas con subplot...

subplot(3,1,1), plot(t, polyval(coef_alt, t)),...
    title('Altura del globo'),...
    xlabel('t, horas'), ylabel('metros'), grid

subplot(3,1,2), plot(t, polyval(coef_vel, t)/3600),...
    title('Velocidad del globo'),...
    ylabel('metros/segundo'), grid,...

subplot(3,1,3), plot(t, polyval(coef_ace, t)/(3600)),...
    title('Aceleración del globo'),...
    xlabel('t, horas'), ylabel('metros/seg^2'), grid, pause

% Cálculo de la altitud máxima...

[alt_max, k] = max(polyval(coef_alt, t));

tiempo_max = t(k);

fprintf('Altura máxima: %8.2f metros. Tiempo: %6.2f horas \n',...
    alt_max(1), tiempo_max(1))

% ----------- FIN ---------- %
```

Las figuras obtenidas de altura, velocidad y aceleración se muestran a continuación junto con la altura máxima alcanzada y la hora a la que se alcanzó.

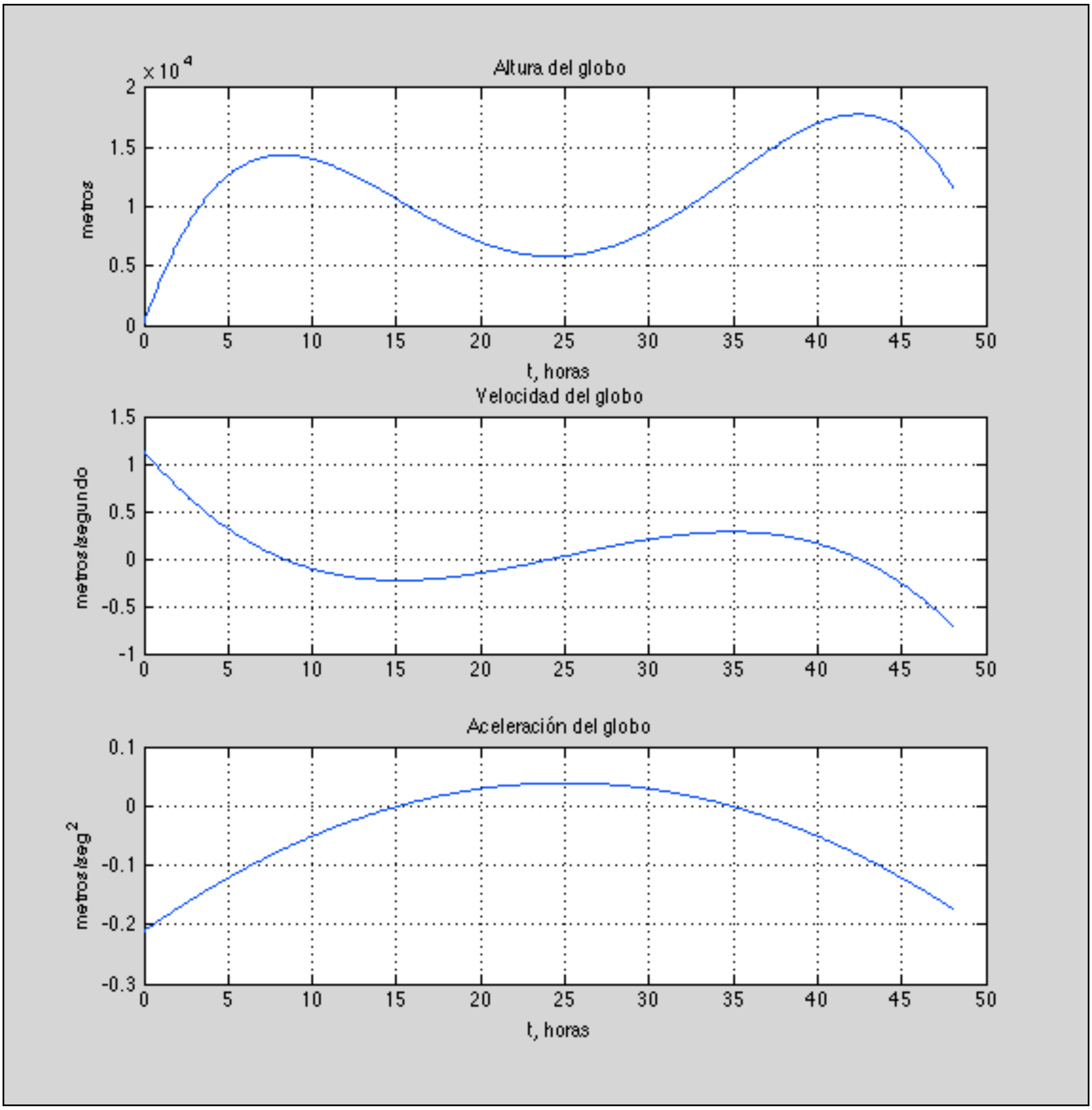


Figura 2-19. Figuras del problema del Globo Meteorológico

```
Altura máxima: 17778.57 metros. Tiempo:  42.40 horas
```

Para la representación de funciones dadas en coordenadas polares, MATLAB dispone de la función `polar`, cuyos argumentos de entrada son el ángulo en radianes y el radio del vector dado por la ecuación a construir. Un ejemplo:

Dibujar la función en polares: $\rho = \sin(2\theta)\cos(2\theta)$

```
% Creamos un vector para Theta con datos equiespaciados entre 0 y pi.
>> Theta = linspace(0,2*pi);
>> Rho = sin(2*Theta).*cos(2*Theta);
>> polar(Theta, Rho), title('r = sen(2t)cos(2t)')
```

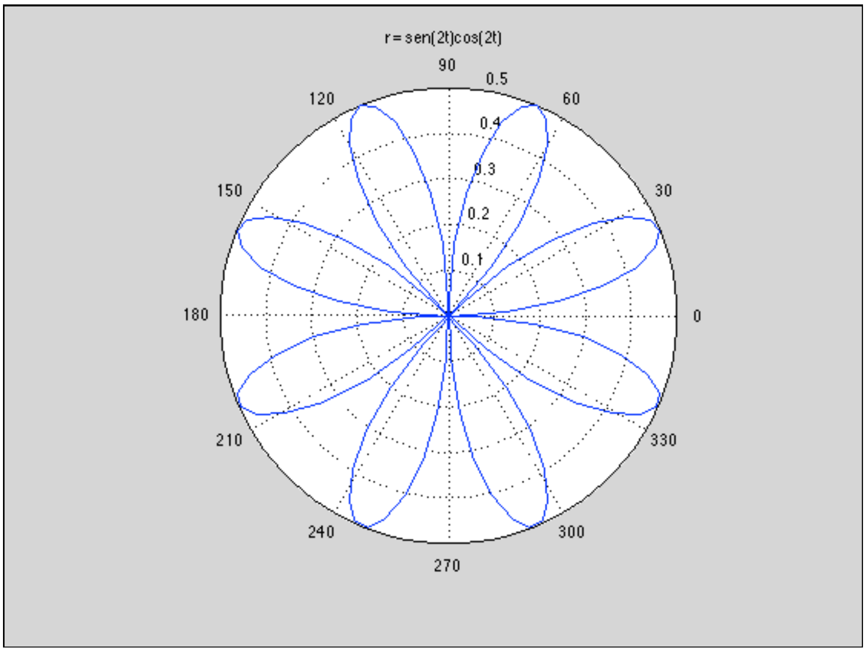


Figura 2-20. Representación en coordenadas polares

Una curva que se ha hecho famosa es la Lemniscata de Bernoulli, cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho^2 = 2a^2\cos(2\theta)$.

La representaremos para $a = 3$.

```
% Lemniscata de Bernuolli
>> Theta = linspace(0,2*pi);
>> Rho= (18.*cos(2.*Theta)).^(1/2);
>> polar(Theta, Rho), title('Lemniscata de Bernoulli')
```

Y aquí está el resultado:

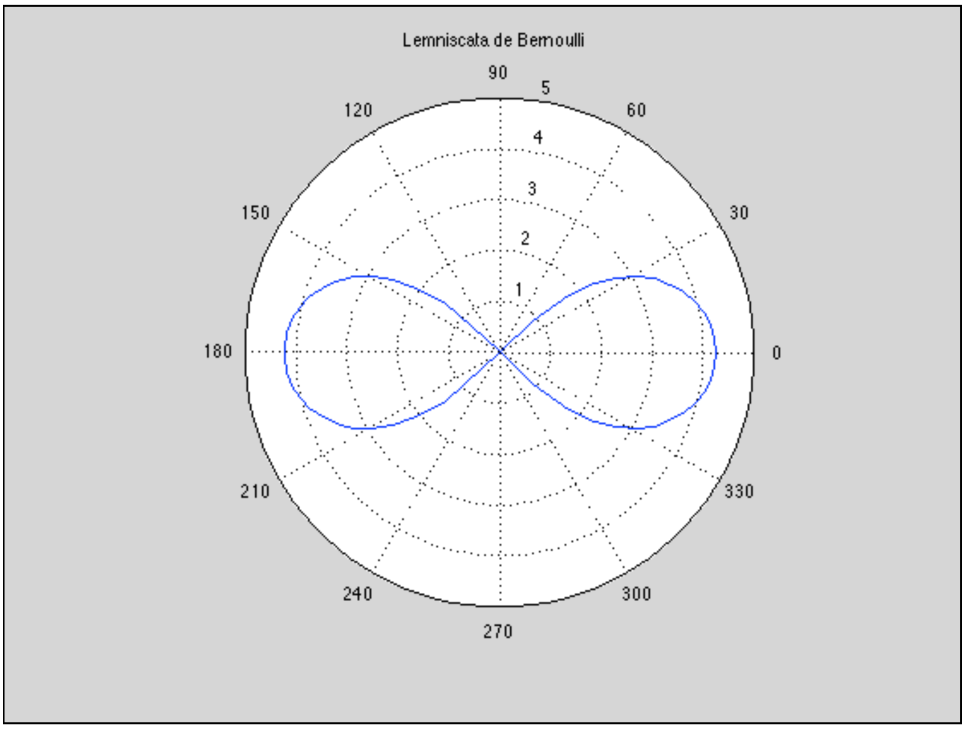


Figura 2-21. Lemniscata de Bernoulli.

El mismo resultado se podría obtener con la ecuación en forma implícita siguiente:
$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

A continuación se presentan un ejercicio resuelto completamente con MATLAB. Se recomienda seguirlos despacio y ejecutando en cada paso en la herramienta sin "copiar" y "pegar". El acostumbrarse a la sintaxis forma parte del dominio de la asignatura.

Ejercicio completo

Dibujar la función: $f(x) = \dfrac{20x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x}$

```
clear all;
% Declaramos nuestras variables simbólicas y nuestra función

syms x;
y = (20*x)/(x^2-1)-(1/x);
```

```
% DOMINIO

% Calculamos cuando el denominador es cero

Dom1 = solve(‘x^2-1=0’,x);

% Obtenemos Dom1 = 1 -1 la función no existirá cuando x=1 y x=-1
% para el otro sumando, la solución es trivial

Dom2 = solve('x=0',x); % Resultado Dom2 = 0

% El dominio de la función y es
% Dom = {x E R/ x<>0 ^ x<>1 ^ x<>-1}

% SIMETRÍAS

% Simetría con respecto eje y: OY -> f(x) = f(-x)

OY = simplify((20*(-x))/((-x)^2-1)-(1/(-x)));

% Resultado OY = 1/x - (20*x)/(x^2 - 1)
% Como y <> OY no existe simetría con el eje y.

% Simetría con respecto eje x: OX -> y = -y

OX = simplify(-((20*x)/(x^2-1)-(1/x)));

% Resultado OX = 1/x - (20*x)/(x^2 - 1)
% Como y <> OX no existe simetría con el eje .

% Simetría con respecto del origen: OR -> f(-x) = -f(x)
% Llamaremos a f(-x) -> OR_1 y a -f(x) -> OR_2

OR_1 = simplify((20*(-x))/((-x)^2-1)-(1/(-x)));
OR_2 = simplify(-((20*x)/(x^2-1)-(1/x)));

% Vemos que OR_1 = OR_2 por lo que existe  simetría con el origen.
% Por lo tanto nuestra función tiene SIMETRIA CON EL EJE ORIGEN

% CORTES CON LOS EJES

[solXx, solYx] = solve('y = (20*x)/(x^2-1)-(1/x)’,'x=0');

% Obteniendo solXx = [ empty sym ] solYx = []
% No existe punto de corte con el eje y.

[solXy, solYy] = solve('y = (20*x)/(x^2-1)-(1/x)','y=0');
```

```
% Obteniendo solXy = (19^(1/2)*i)/19    -(19^(1/2)*i)/19 y
% solYy = 0 0 .Al no existir solución real, no tenemos
% corte con el eje x.

% MÁXIMOS Y MÍNIMOS

% 1.Calculamos la primera derivada

der1 = diff(y);
der1 = simplify(der1);

% 2. Igualamos la primera derivada a 0

punt_max_min = solve('-(19*x^4 + 22*x^2 - 1)/(x^2*(x^2 - 1)^2) =
0', x);

% punt_max_min = ((2*35^(1/2))/19 - 11/19)^(1/2) (REAL)
%  (- (2*35^(1/2))/19 - 11/19)^(1/2) (IMAGINARIO)
%   -((2*35^(1/2))/19 - 11/19)^(1/2) (REAL)
% -(- (2*35^(1/2))/19 - 11/19)^(1/2) (IMAGINARIO)

% 3. Estudiamos los valores obtenidos para saber dónde hay
% máximos y mínimos. Realizamos es la 2a. derivada.

der2 = diff(y,2);
der2 = simplify(der2);

% Resultado y''= (2*(19*x^6 + 63*x^4 - 3*x^2 + 1))/(x^3*(x^2 - 1)^3)

% 4. Sustituiremos los puntos obtenidos anteriormente en
% la segunda derivada para obtener si es un máximo o mínimo.

punt_x1 = subs(der2, 'x', '((2*35^(1/2))/19 - 11/19)^(1/2)');

% Resultado punt_x1 = -247.3421

punt_x2 = subs(der2, 'x', '-((2*35^(1/2))/19 - 11/19)^(1/2)');

% Resultado punt_x2 = 247.3421


% Si es el resultado es > 0 -> mínimo, si es < 0 -> máximo.

% 5. Sustituiremos los puntos (del punto 2) en la función sin
% derivar (con el comando subs) y tendremos las coordenadas del
% eje y de los máximos y mínimos.
```

```
coor_y1 = subs(y, 'x', punt_max_min(1)); % coor_y1 = -9.1556

coor_y2 = subs(y, 'x', punt_max_min(3)); % coor_y2 = 9.1556

%PUNTOS DE INFLEXIÓN

% Veamos si hay puntos de inflexión:
% Igualamos la segunda derivada a 0.

punt_infl_eje_x = solve('(2*(19*x^6 + 63*x^4 - 3*x^2 + 1))/
(x^3*(x^2 - 1)^3) = 0', x);

% Se obtienen resultados imaginarios, por lo que no tiene puntos de
% inflexión.

% ASÍNTOTAS

% ASÍNTOTA HORIZONTAL

asin_hor = limit(y, 'x', inf);

% Por lo tanto tenemos una asíntota horizontal en y = 0

% ASINTOTA VERTICAL

% Son aquellos valores de x que hacen a la y tomar un valor
% infinito. Se han visto en el dominio de la función [1 -1 0]

% ASINTOTA OBLICUA

% Hallamos m y n en la recta y = m*x + n

% Calculamos m

m = limit(y/x, 'x', inf); % m = 0

% Calculamos n

n = limit(y-m*x, 'x', inf); % n = 0

% Ambos valores son 0 -> no hay asíntotas oblicuas

% DIBUJAMOS LA FUNCIÓN

h = ezplot(y);
hold on;
```

```
grid on;
set(h, 'color', ‘r');

% Dibujamos las asíntotas horizontales

ah1 = ezplot(asin_hor);
set(ah1, 'color', ‘g');

% Dibujamos la asíntotas verticales (0, -1 y 1)

plot(0*[1 1], [-40 40], ‘r’);
plot(1*[1 1], [-40 40], ‘r’);
plot(-1*[1 1], [-40 40], ‘r’);

% Dedique un momento a entender las tres líneas anteriores

% Escribimos el título de la gráfica y ejes

title('Curva y = (20*x)/(x^2-1)-(1/x)’);
xlabel('Eje X');
ylabel('Eje Y');

% Dibujamos los máximos y mínimos

text(0.2093,-9.1556,'o');
text(0.2093,-9.1556,'     Máximo');
text(-0.2093,9.1556,'o');
text(-0.2093,9.1556,'    Mínimo');

% Creamos la leyenda de la gráfica

legend('Función y = (20*x)/(x^2-1)-(1/x)','Asíntota Horizontal y =
0’);

% ————————————————————————— FIN ——————————————————————————————
```

6.- Ejercicio propuestos

Ejercicio 1

Estudiar y dibujar las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2(4 - x^2)$ b) $f(x) = x\cos(x)$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = sen^2(x)$

e) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ f) $f(x) = -4sen(1 - x)$

Ejercicio 2

Determinar el dominio de las siguientes funciones:

$(a) y = \log(x)$ $(b) y = \sqrt{x^3}$

$(c) y = \dfrac{a + x}{a - x}$ $(d) y = \sqrt{3+x} + \sqrt[4]{7-x}$

$(e) y = a^x \; con \; (a > 0)$ $(f) y = \log(1 - x)$

Ejercicio 3

Dibujar la función: $y = \cos(x + y)$

Ejercicio 4

Dibujar la función: $\cos(xy) = x$

Ejercicio 5

Dibujar la función: $y^2 - 2xy + b^2 = 0$ para b = 0, 1, 2 y 3. En la misma figura.

Ejercicio 6

Dibujar la función: $y^3 + x^3 - 3axy = 0$ para a= 1, 2 y 3. En la misma figura.

Ejercicio 7

Estudiar y dibujar las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x(x^2+4)^2$$

$$b) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$c) f(x) = \frac{Lx}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

$$e) f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$$

$$g) f(x) = \frac{x}{e^{|x-1|}}$$

$$h) f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 & \text{si } x<0 \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \end{Bmatrix}$$

$$i) f(x) = \begin{Bmatrix} -x & \text{si } x<-1 \\ 1 & \text{si } 0< x<2 \\ x^2 & \text{si x>2} \end{Bmatrix}$$

$$j) f(x) = \begin{Bmatrix} \sqrt{1-x} & \text{si } x<-1 \\ 1-x^2 & \text{si -1} < x<1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si x>1} \end{Bmatrix}$$

Ejercicio 8

Dibujar la función en paramétricas;

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t(t^2-1)}{t^2+1}, \frac{2(t^2-1)}{t^2+1} \right) \text{ donde } -5 \leq t \leq 5$$